

STRUCTURE PRESQUE-TRANSVERSE

TONG VAN DUC

On étend le procédé de F. Brickell et R. S. Clark [1] à l'étude d'une structure presque-transverse intégrable.

On rappelle les notions utiles suivantes:

Soit M une variété différentiable sur laquelle est donnée une connexion linéaire ∇ . Selon K. Yano, un champ de vecteurs V sur M est dit récurrent par rapport à ∇ si $\nabla_X V = X$ quel que soit le champ de vecteurs X sur M .

Une structure localement affine sur M est la donnée d'un atlas maximal dont les changements de coordonnées sont des difféomorphismes locaux de la forme:

$$x \rightarrow Ax + b,$$

où $A \in Gl(n, \mathbf{R})$ et $b \in \mathbf{R}^n$. Si $b = 0$, on a une structure localement centro-affine.

A chaque structure localement affine sur M est canoniquement associée une connexion linéaire plate dont les coefficients par rapport aux repères adaptés sont nuls.

Soit M une variété différentiable de dimension n munie d'un feuilletage \mathcal{L} de codimension q . Cela revient à doter M d'un atlas $\mathcal{Q} = \{U, x^u, x^a\}$ dont les fonctions de transition vérifient:

$$\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^u} = 0,$$

où $u, v, u', v', \dots = 1, 2, \dots, n - q$ et $a, b, a', b', \dots = 1, 2, \dots, q$. Soit L le fibré vectoriel formé par les vecteurs tangents aux feuilles de \mathcal{L} et soit (Q, p, M) le fibré-quotient de TM par L . Chaque élément $[v]$ de Q a pour représentant un vecteur v de la forme:

$$v = v^u \frac{\partial}{\partial x^u} + v^a \frac{\partial}{\partial x^a},$$

si $p(v)$ se trouve dans le domaine U d'une carte (U, x^u, x^a) . Comme (v^a) ne dépend en fait que de $[v]$, on prendra (x^u, x^a, v^a) comme coordonnées locales dans $p^{-1}(U)$. On obtient ainsi sur la variété Q un atlas \mathcal{Q} dont les

fonctions de transition sont de la forme

$$x^{u'} = x^{u'}(x^u, x^a), x^{a'} = x^{a'}(x^a), v^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} v^a.$$

La matrice jacobienne de ces transformations est de la forme:

$$(1) \quad \begin{vmatrix} A & B & O \\ 0 & C & O \\ O & D & C \end{vmatrix},$$

où $A \in Gl(n - q, \mathbf{R})$, $C \in Gl(q, \mathbf{R})$, $D \in gl(q, \mathbf{R})$, $B \in gl(n - q, q)$.

Definition. Une structure presque-transverse sur M est une G -structure dont les éléments de G sont de la forme (1). Une structure presque-transverse est donc une généralisation d'une structure presque-tangente.

Ainsi l'espace total du fibré transverse (Q, p, M) est muni d'une structure presque-transverse intégrable.

Definition. Un champ de vecteurs $X = X^u \partial / \partial x^u + X^a \partial / \partial x^a$ sur la variété feuilletée M est dite feuilletée si $\partial X^a / \partial x^u = 0$.

Un tel champ est caractérisé par le fait que les transformations du groupe local à un paramètre qu'il engendre envoient les feuilles de \mathcal{L} sur les feuilles de \mathcal{L} .

Soit maintenant M une variété différentiable munie d'une structure presque-transverse intégrable. Les fonctions de transition dans les cartes adaptées à cette structure sont de la forme:

$$(x, y, z) \rightarrow (f(x, y), g(y), (Dg)_y z + h(y)),$$

où g est un difféomorphisme local et Dg sa différentielle.

Il en résulte que M est munie de deux feuilletages \mathcal{F} et $\overline{\mathcal{F}}$ dont les feuilles sont localement définies par $x = c^{te}$ et $y = c^{te}$ d'une part et $y = c^{te}$ et $z = c^{te}$ d'autre part.

Une carte adaptée à la structure presque-transverse intégrable est à la fois adaptée aux feuilletages \mathcal{F} et $\overline{\mathcal{F}}$. Soit F_m la feuille de \mathcal{F} qui passe par le point m de M . La carte $z|_{F_m}$ définit une structure localement affine sur F_m .

Une structure de pseudo-groupe dont les fonctions de transition sont de la forme:

$$(x, y, z) \rightarrow (f(x, y), g(y), (Dg)_y(z))$$

sera dite quasi-transverse.

Proposition 1. Une structure presque-transverse intégrable sur M admet une structure subordonnée quasi-transverse si et seulement si M possède un champ de vecteurs global qui est $\overline{\mathcal{F}}$ -feuilleté et qui est tangent aux feuilles de \mathcal{F} et récurrent par rapport à la connexion plate de la structure localement affine induite sur chaque feuille.

Preuve. Supposons M mini d'une structure quasi-transverse et soit (U, x, y, z) une carte adaptée. Si l'on considère le champ local $V = z^a(\partial/\partial z^a)$ sur U et si (U', x', y', z') est une autre carte adaptée, on a sur $U \cap U'$:

$$z^a \frac{\partial}{\partial z^a} = z^{a'} \frac{\partial}{\partial z^{a'}}.$$

Donc V est un champ global sur M qui est en plus $\overline{\mathcal{F}}$ -feuilleté. D'autre part, pour tout champ de vecteurs $X = X^b(\partial/\partial z^b)$ tangent à \mathcal{F} , on a $\nabla_{X^b\partial/\partial z^b} V = X^b\partial/\partial z^b$ où ∇ est la connexion plate de la structure localement affine induite sur les feuilles de \mathcal{F} . Donc V est récurrente par rapport à cette connexion.

Réciproquement, supposons M mini d'un tel champ de vecteurs V . Dans une carte (U, x, y, z) adaptée à la structure presque-transverse intégrable, V a pour expression locale $V = V^a\partial/\partial z^a$. Soit $X = X^b\partial/\partial z^b$ un champ de vecteurs sur une feuille. On a

$$\nabla_X V = X^b \frac{\partial v^a}{\partial z^b} \frac{\partial}{\partial z^a}.$$

Puisque V est récurrente par rapport à ∇ et \mathcal{F} -feuilletée, on a

$$v = z + c(y),$$

où c est une application différentiable.

Par suite, le triplet (x, y, v) définit dans un ouvert de M un système de coordonnées locales adaptées à la structure presque-transverse intégrable. Les fonctions de transitions de telles coordonnées sont de la forme:

$$x' = f(x, y), y' = g(y), v' = (Dg)_y v + h(y).$$

Puisque $V = v^a\partial/\partial z = v^{a'}\partial/\partial z^{a'}$, on doit avoir $h = 0$. Ainsi les cartes (x, y, v) déterminent une structure quasi-transverse sur M .

Dans ce qui suit, on suppose M mini d'une structure quasi-transverse et soit V le champ de vecteurs associé à cette structure.

Proposition 2. *L'ensemble des zéros du champ de vecteurs V est mini d'une structure de sous-variété régulier de M . De plus, cette sous-variété est feuilletée.*

Preuve. Soit M' l'ensemble des zéros de V , et soit m' un point de M' . Soit (U, x, y, z) une carte contenant m' et adaptée à la structure quasi-transverse et telle que U soit homéomorphe à un ouvert $W_1 \times W_2$ de $\mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q$ où W_1 et W_2 sont des ouverts cubiques. L'ensemble $M' \cap U$ est composé de points définis par $z = 0$. Soit $j: M' \rightarrow M$ l'injection canonique. Alors $(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y) \circ j$ est une bijection d'un ensemble de M' sur l'ouvert W_1 de \mathbb{R}^{n-q} et définit ainsi une carte de M' . On vérifie facilement que les cartes (\bar{x}, \bar{y}) définissent une structure de variété différentiable sur M' . Par construction,

c'est une sous-variété régulière de M . Comme $\bar{y} = y \circ j$, on en déduit que la variété M' est feuilletée.

Théorème. *Soit M une variété différentiable munie d'une structure presque-tangente intégrable, et soit ∇ la connexion linéaire plate de la structure localement affine induite sur les feuilles de l'un des feuilletages associés à la structure presque-transverse intégrable. Pour que M soit l'espace total d'un fibré vectoriel isomorphe au fibré transverse d'un feuilletage, il faut et il suffit que ∇ soit complète et que la structure presque-transverse intégrable admette une structure subordonnée quasi-transverse.*

Preuve. On a vu que l'espace total Q de fibré transverse d'un feuilletage \mathcal{L} est muni d'une structure quasi-transverse. Il est évident que la connexion plate induite sur les feuilles de l'un des feuilletages associés à la structure quasi-transverse est complète. Réciproquement, supposons les hypothèses du théorème satisfaites. Soit \mathcal{F} le feuilletage défini plus haut. Chaque feuille de \mathcal{F} est ainsi dotée d'une structure localement centroaffine. D'après un théorème de F. Brickell et R. S. Clark [1], cette dernière structure est isomorphe à la structure canonique de \mathbf{R}^q , d'où l'existence d'une carte globale adaptée s sur chaque feuille de \mathcal{F} . De plus, le champ de vecteurs V associé à la structure quasi-transverse n'a qu'un seul zéro sur chaque feuille de \mathcal{F} , ce qui permet de définir une application surjective π de M sur M' qui à chaque point m de M fait correspondre le vecteur nul m' sur la feuille qui passe par m .

Soit m' un point quelconque de m' et $j_{m'}: F_{m'} \rightarrow M$ l'injection canonique. Soit (U, x, y, z) une carte contenant m' choisie comme dans la démonstration de la proposition 2. Alors la carte $z \circ j_{m'}$ est adaptée à la structure localement centro-affine sur $F_{m'}$; par suite:

$$z \circ j_{m'} = As + b,$$

où $A \in Gl(q, \mathbf{R})$ et $b \in \mathbf{R}^q$. $As + b$ est une carte globale sur $F_{m'}$ et permet de transporter sur $F_{m'}$ la structure d'espace vectoriel de \mathbf{R}^q . Cette structure d'espace vectoriel sur $F_{m'}$ ne dépend pas de $As + b$ puisque cette carte est adaptée à la structure localement centro-affine.

L'extension de la carte $z \circ j_{m'}$ peut être faite en chaque point de l'ouvert $\bar{U} = \bar{x}^{-1}(W_1)$; d'où une application Z de $\pi^{-1}(\bar{U})$ dans \mathbf{R}^q . D'autre part (x, y) sont constantes sur les tranches de U et peuvent être prolongées en des applications (X, Y) de $\pi^{-1}(\bar{U})$ dans $\mathbf{R}^{n-2q} \times \mathbf{R}^q$. On obtient ainsi une bijection de $\pi^{-1}(\bar{U})$ sur $\bar{U} \times \mathbf{R}^q$. Par conséquent (M, p, M') est un fibré vectoriel. Soit (Q', π', M') le fibré transverse de la variété feuilletée M' . Soit $m \in M$ et $m' = \pi(m)$. Soit (x, y, z) une carte en m' qui se prolonge en une carte (X, Y, Z) au point m .

L'application h de M dans Q' définie par

$$m \rightarrow Z^a(m) \frac{\partial}{\partial \bar{y}^a}(m'),$$

où $(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y) \circ j_m$, est la carte de M' au point m' envisagée plus haut, ne dépend pas de la carte (x, y, z) car la carte (X, Y, Z) est adaptée à la structure quasi-transverse [1]. Comme la restriction de h à chaque fibré de (M, π, M') est un isomorphisme, h est lui-même un isomorphisme de (M, π, M') sur (Q', π', M') .

References

- [1] F. Brickell & R. S. Clark, *Integrable almost tangent structures*, J. Differential Geometry 9 (1974), 557-563.
- [2] I. Vaisman, *Variétés riemanniennes feuilletées*, Czechoslovak Math. J. 21 (1971) 46-75.
- [3] K. Yano, *The theory of Lie derivations and its applications*, North-Holland, Amsterdam, 1955, 1-68.

UNIVERSITE DE GRENOBLE I